

Задача 2. Математици – Анализ

Ще използваме динамично оптимизиране за решаването на тази задача. Нека въведем функция $F(N, S)$, която ни дава броя числа със сума на цифрите S , които са по-малки или равни на N . Тогава, ако във входа е зададен интервала $[A, B]$ отговорът на задачата ще е $F(B, S) - F(A-1, S)$.

Нека се опитваме да пресметнем отговора за $F(N, S)$. Нека най-лявата цифра на N е D . Тогава отговора за $F(N, S)$ може да се пресметне като:

$$F(X, S) + F(X, S-1) + \dots + F(X, S-D+1) + F(B, S-D)$$

като X задава число, което има с една цифра по-малко от N и се състои само от девятки, а B е частта на числото N без първата цифра (която има стойност D). Нека разгледаме един пример, за да стане по-ясно:

Ако търсим отговорът за числото 48351 тогава $D = 4$, $X = 9999$, $B = 8351$. Тогава ако на първа позиция сложим цифрите 0, 1, 2 или 3 останалата част от числото може да варира от 0000 до 9999, а именно от 0000 до X . Ето защо за всяка възможна първа цифра по-малка от D разглеждаме $F(9999, S-D_i)$, като D_i заема стойностите от 0 до 3.

Разбира се първата цифра може да е равна и на 4. Тогава ни интересуват числата в интервала 0000 до 8351 със сума $S - 4$. Ето защо накрая сумираме и $F(8351, S-4)$.

Интересно е да се отбележи, че за дадена дължина на числото L , което е първи параметър на F се интересуваме от отговора само за две числа. Едното се състои само от девятки, а другото съвпада с най-десните L цифри на числото N , което в горния пример е 48351.

Второто число в отговора, което представлява най-малкото число, което има сума S и е в зададения интервал може да се намери като се използва двоично търсене и всеки път се пита колко числа има със сума на цифрите S , които са по-малки или равни. За целта може да се използва дефинираната функция F . Ще оставим на читателите да измислят и други начини за решаването на тази втора част от задачата.