Задача 3. Надпревара - Анализ

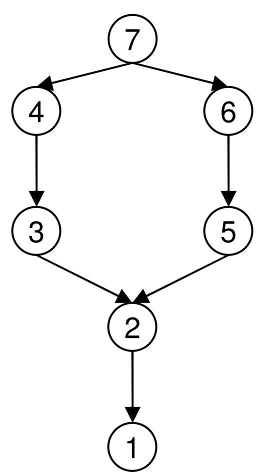
Нека представим мрежата от градове и пътища като насочен граф. Забелязваме, че ако един връх V в този граф не е достижим от връх 1 или от този връх не може да се стигне до връх 2, няма смисъл да разглеждаме V. Така конструираме нов граф, който получаваме от началния като махнем всички подобни върхове и ребрата свързани с тях.

Ако в така полученият граф има цикли това ще доведе до безкраен брой различни пътища. Това е така, защото ако има цикъл, лесно можем да минем по него колкото пъти искаме.

Следователно ако графът има поне един цикъл трябва да се изведе „inf". В противен случай графът е ацикличен и насочен. Следователно може да се направи топологично сортиране по него. Това ще ни помогне да намерим крайния отговор.

За да намерим дали има цикли в графа можем да комбинираме стъпката по правене на топологично сортиране и откриване на цикли. Това става като се направи едно обхождане в дълбочина на графа.

От една страна ако по време на обхождането от даден връх излиза ребро, което отива към връх, който е в стека на обходането в дълбочина, това означава, че сме намерили цикъл. Понякога такива ребра се наричат обратни ребра (back edges). От друга страна, ако един ацикличен насочен граф се обходи в дълбочина, това автоматично се случва в реда, в който графа е топологично сортиран. Нужно е върховете да се номерират последователно в момента, когато се излиза от даден връх. Това ще рече, че сме били в даден връх и се връщаме обратно към върха, от който сме дошли. Вижте фигура 1 за примерно номериране на един граф.



Фигура 1. Обхождането започва от най-горния връх и номерира върховете така, че да са топологично подредени. Върховете са били посетени в следния ред: 7, 4, 3, 2, 1, 6, 5, но сме ги „напуснали" в реда, в който са номерирани.

Може да се помни за всеки връх дали в момента е в стека на обхождането и дали е бил посетен като цяло, за да се определя бързо дали има обратни ребра. По този начин сложността на обхождането в дълбочина си остава O(V + E).

За да се намери крайния резултат в случаите, когато няма цикли, върховете на графа могат да се обходят в ред обратен на топологичното сортиране. За всеки връх се пресмята броя пътища до него от връх номер 1. Това става, като за един връх се разгледат входящите ребра и се сумират отговорите намерени за върховете, от които идват тези ребра. Тези отговори вече са пресметнати, защото обхождаме върховете в ред обратен на топологичното сортиране. Накрая отговорът на задачата е отговорът за връх номер 2.

Това пресмятане на отговорите също може да се прави по време на обхождането в дълбочина, защото то обхожда върховете в правилния ред. Там обаче за един връх се интересуваме по колкото начина може да се стигне от него до връх 2. Ето защо за всеки връх се пита какви са отговорите за върховете, до които той има ребра. Ако отговорът за тези върхове все още не е пресметнат, това значи, те не са били посетени от обхождането в дълбочина. За вече посетените върхове отговорът се записва и се използва на готово следващият път, когато е нужен. Разбира се отговорът за връх номер 2 е 1, защото има само един път от връх 2 до себе си. Накрая отговорът на задачата е отговорът за връх номер 1.

По този начин е възможно цялата задача да се реши с помощта на само едно обхождане в дълбочина. Дори и да се раздели на две части решението и резултатите за ациклични графи да се смятат отделно, общата сложност е O(V + E), където V е броят на върховете, а E е броят на ребрата в графа.