Задача 2. Нули – Решение

Автор: Слави Маринов

Това е една много хубава задача, която не изисква сериозни познания по математика или програмиране, а най-вече логическо мислене. Хайде да помислим логически и да видим дали няма да успеем да я решим.

Най-простото решение е да извършим умножението на числата от 1 до N, след което да видим колко пъти даденото число се дели на 10 (така ще получим броя нули), и след това да видим остатъка на така разделеното число при деление на 10. Например:

Умножаваме: 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9 * 10 * 11 * 12 и получаваме 479001600.

Делим 479001600 на 10 докато можем: извършваме две успешни деления и осатва 4790016. Вземаме остатъка на 4790016 при деление на 10 – това е цифрата 6. Така отговорът ни е последна цифра 6 и две нули.

Това решение, макар и напълно вярно, няма да ни свърши работа, понеже числото N може да бъде много голямо (до 50,000), и съответно нямаме готов тип, който да събере такова голямо число. Дори да ползваме long long, решението ни е ще работи едва до 20 – при 21 вече отговорът ни ще бъде грешен.

Ясно е тогава, че не може просто да извършим първо всички умножения, и след това – деленията на 10. Ясно е освен това, че не можем да си запазим целия резултат от умноженията в паметта – ще трябва да измислим някаква хитрина, с която да получим отговора.

В условието се изискват две неща: броя на нулите и последната цифра на числото. Ще се преборим с двете неща поотделно – първо с броя на нулите, после – с последната цифра.

Първият ни въпрос е: откъде идват нулите на края на едно число, че да можем да ги преборим? Кога в края на едно число се получава нула? Дотук лесно – когато умножим числото по десет. Ако например вземем числото 123 и го умножим по 10, ще получим 1230 (една нула), ако го умножим по 100 – две нули, и т.н.

Така въпросът за броя на нулите вече става „колко пъти в произведението 1 * 2 * 3 * ... * N” се получава умножение по 10?”. Сега пак трябва да помислим – откъде се получава числото 10? Нека да разпишем примера:

1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9 * **10** * 11 * 12 = 479001600.

Вижда се лесно, че едната нула идва директно от числото 10. Откъде идва другата нула? Тъй като 10 = 2 * 5, то при умножението на 2 * 5 се образува нова 10-ка, от която идва другата нула:

1 * **2** * 3 * 4 * **5** * 6 * 7 * 8 * 9 * **10** * 11 * 12 = 479001600.

Всъщност, тъй като всяка 10-ка е равна на 2 * 5, ако си разбием произоведението 1 * 2 * ... * N на прости множители, ето така:

1 * 2 * 3 * (2 * 2) * 5 * (2 * 3) * 7 * (2 * 2 * 2) * (3 * 3) * (2 * 5) * 11 * (2 * 2 * 3) = 479001600,

То задачата ни се свежда до това да преброим колко двойки и колко петици има в разбиването на прости множители. След това, като комбинираме колкото можем повече двойки с петици, получаваме броят на десятките. В горния пример имаме десет двойки и две петици. Две от двойките комбинираме с петиците, и получаваме две десятки. Затова и последната броят на нулите е две.

Сега остава въпросът: Как да намерим колко двойки и колко петици има в произведението на числата от 1 до N? Най-простият вариант е за всяко число от 1 до N, почваме да го делим на 2 докато можем и после го делим на 5 докато можем, като междувременно записваме колко деления сме извършили. Сумата за всички числа ни е търсения брой петици и търсения брой двойки.

След това, минимумът от броя на петиците и двойките ни дава броя десетици, което пък ни дава броя нули.

Това решава първата част на задачата – броя нули. А как да намерим последната цифра, която не е нула?

Ако вземем разбиването на прости множители:

1 * 2 * 3 * (2 * 2) * 5 * (2 * 3) * 7 * (2 * 2 * 2) * (3 * 3) * (2 * 5) * 11 * (2 * 2 * 3) = 479001600,

И махнем двойките и петиците, които образуват 10-ки

1 * **2** * 3 * (2 * 2) * **5** * (2 * 3) * 7 * (2 * 2 * 2) * (3 * 3) * (**2 * 5**) * 11 * (2 * 2 * 3) = 479001600,

То се получава:

1 * 3 * (2 * 2) * (2 * 3) * 7 * (2 * 2 * 2) * (3 * 3) * 11 * (2 * 2 * 3) = 4790016.

Тоест, зачеркваме отдясно двете нули (които идват от 10 * 10), а отляво – зачеркваме две двойки и две петици (отново 10 * 10).

Така ако извършим умножнието на числата вляво и вземем последната цифра, ще получим 6.

Да, но ние вече видяхме, че при тези големи стойности на N няма никакъв шанс да успеем да извършим това умножнение. Сега възниква въпросът: как да получим само последната цифра при умножение на числата?

Един много хубав трик в математиката е умножението по модул. Така например ако ни трябва остатъкът при деление на 10 на някакво произведение, то на всяка стъпка можем да вземаме само остатъка при деление на 10 и да умножаваме.

Например ако търсим остатъка при деление на 10 на 6 * 7 * 8 * 9, правим така:

6 * 7 = 42 == 2

2 * 8 = 16 == 6

6 * 9 = 54 == 4

Следователно последната цира на 6 * 7 * 8 * 9 е 4 (и наистина, 6 * 7 * 8 * 9 = 3024).

И така, вече имаме пълната рецепта за решаване на задачата:

1. Броим колко двойки и колко петици имаме в произведението на числата от 1 до N
2. Минимумът от тези две числа е равен на броя нули
3. Произведението на всички останали числа (получени като махнем двойките и петиците, които образуват десятки) по модул 10 ни дава последната цифра.