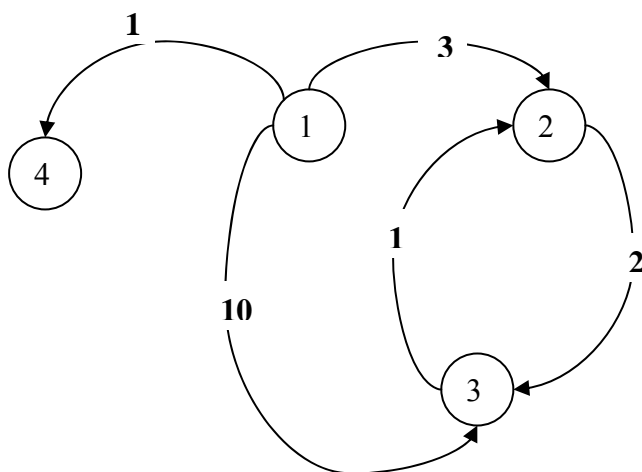


Задача 1. Маршрути

Автор: Тодор Петров

Имаме градове и пътища между тях, които имат някаква дължина, това е стандартен граф. Следователно задачата е да се намери k -я най-къс път в граф, като намерените пътища могат да съдържат цикли. Задачата тук лесно може да се реши използвайки идеята от алгоритъма на Дейкстра. Т.е. какво правим? Ще разгледаме алгоритъм, който ни позволява да намерим най-късите k пътя от даден връх X до всички останали. Започваме строенето по същия начин като при Дейкстра, първо взимаме всички ребра, които излизат от връх X . След това намираме този връх, за който пътят от X до него е минимален и повтаряме същата процедура и след това правим същото и т.н. Всеки път като изберем върха, за който пътят от X до него е минимален указваме че пътят от X до него е поредният най-къс път.

Нека вземем примера от задачата, който се представя със следния граф:



Ще покажем как се търсят най-кратките пътища от 1 до всички останали върхове.

1. Взимаме всички достижими от 1 върхове: 2 и 3
2. Най краткият път до някой от избраните върхове е до 2 (разстоянието е 3) => избираме връх 2 и отбелязваме, че най-краткият път до 2 е 3
3. Избираме всички достижими от 2 върхове: 3 и маркираме разстоянието до него – това е разстоянието до избиране връх 2 + дължината на реброто 2-3 т.е. 5
4. Отново избираме най-краткия път от достигнатите върхове – това е 3 с дължина на маршрута – 5. => най-късия път от 1 до 3 е 5. Отбелязваме всички достижими от 3 върхове: 2 и отбелязваме разстоянието от 1 до него – 6
5. На следващата стъпка най-близкият връх е 2 с разстояние от 1 – 6, което означава че маркираме отново най-къс път до 2, но тъй като вече имаме маркиран един такъв това означава, че това е втория най-къс път.
6. Така процесът продължава

Възниква въпросът кога спираме описания процес.

Тъй като запитванията са на-много до 100-я най-къс път, това означава че нас ни интересува за всеки връх не повече от първите 100 най-къси пътя. В този смисъл в процеса на алгоритъма, когато избираме най-близкия достижим връх и маркираме като поредния най-къс път, ако получим най-късия 101 път, това не ни интересува, тъй като ако от този път са достижими някакви върхове то в предните 100 пъти, в които сме го достигнали те отново ще са били достижими т.е. ще има поне 100 по-къси пътя от тези, които могат да се получат с добавянето сега на ребрата излизащи от този връх, което означава че този връх можем напълно да го игнорираме. По този начин в момента, в който сме използвали вече всички върхове и не можем да изберем най-близък връх, процесът спира.

Както се вижда, това е съвсем незначително модифицирана идеята на Дейкстра. Ако ползваме пирамида, то сложността на алгоритъма е $O(n * n^k * (\log(k * n) + n)) \sim O(k * n^3)$, ако не ползваме пирамида сложността е $O(n * n^k * (k * n + n)) \sim O(n^3 * k^2)$, което съобразно ограниченията означава доста бавно т.е. решението трябва да ползва пирамида.