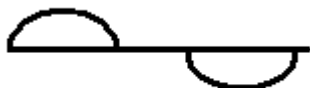


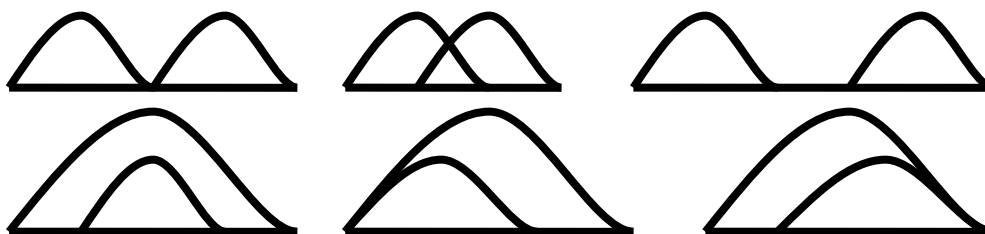
Задача 1. Железница

Автор: Тодор Петров

Задачата е да построим пътищата по такъв начин, че да не се пресичат помежду си и с железопътната линия. Очевидно е, че като строим пътищата на юг или на север от жп линията те няма да я пресичат.



Въпросът е как да строим пътищата, така че да не се пресичат помежду си. Един път между два града дефакто може да се разгледа като един интервал. Т.е. два пътя са два интервала. Нека разгледаме възможните разположения на два пътя (интервала) и кога те се пресичат:



От графиките се вижда, че два пътя се пресичат единствено ако началото на единия е между краищата на другия (не е нито един от двата края), а краят му е извън интервала, формиран от двата края на първия път. Тривиалната проверка дали един интервал пресича кой да е от други n интервала е със сложност $O(n)$ т.е. проверка за пресичане с всеки един от n -те интервала.

Как да решим задачата?

Очевидно е, че първият път може да бъде построен както на юг така и на север, но тъй като търсим най-малката лексикографска наредба си избираме север ($N < S$). На следващата стъпка трябва да видим всички интервали, които пресичат първия интервал по начина, описан по-горе. Очевидно всички тези пътища трябва да бъдат разположени на юг (ако някои два от тях се пресичат, обаче, това означава че задачата няма решение и трябва да се изведе NO). Да приемем, че никой два не се пресичат и те образуват множество от пътища S . На следващата стъпка трябва да видим дали някой от останалите ненаместени пътища не пресича някой от интервалите в множеството S , ако това е така, той трябва да бъде сложен на север. Очевидно е, че нито един от тези пътища няма да пресича пътят поставен на север в стъпка 1 тъй като ако беше така, той щеше да бъде поставен на юг в стъпка 2. Отново правим проверката обаче дали някои два интервала от тези новопоставени на север не се пресичат, което ще означава, че няма решение. След тази стъпка сме добави на север нови X интервала, които образуват множеството S_2 . На следващата стъпка трябва да видим дали някой от непоставените пътища не пресичат някой път от множеството S_2 , ако е така то той трябва да бъде поставен на юг и т.н. Процесът продължава докато не свършат пътищата или докато няма вече нови интервали, които да пресичат вече поставените. Ако всички пътища са вече използвани това означава, че сме намерили разположение на пътищата, което удовлетворява условията. Ако обаче просто вече няма интервали, които да пресичат поставените, това означава че както и да ги нареждаме останалите интервали не можем да пресечем никой от вече поставените, а само могат да се пресичат помежду си, което означава че спокойно можем да започнем алгоритъма от начало само с все още неразположените пътища. Взимаме първия и го поставяме на север (отново заради лексикографската наредба, иначе може да изберем и на юг) и за останалите правим същия алгоритъм. В крайна сметка или ще стигнем до извода, че пътищата не могат да бъдат построени или ще бъде намерено разположение, което да отговаря на условията.

Каква е сложността на решението?

На всяка стъпка намираме x_i пътя, които пресичат вече разположените. На следващата стъпка трябва да проверим за всеки един от останалите интервали дали пресича някой от намерените на предната стъпка x_i , ще бъдат намерени x_j такива. Ако приемем че преди да започнем проверката кои пътища пресичат поставените x_i пътя е имало общо P пътя, това означава, че тази стъпка е станала за време $P \cdot x_i$ тъй като всяка проверка дали някой от P -те пътя пресича тези x_i пътя е точно x_i операции. В този смисъл общата сложност на алгоритъма е $O(n \cdot x_1 + (n - x_1) \cdot x_2 + (n - x_1 - x_2) \cdot x_3 \dots) < O(N^2)$. Всъщност се оказва че намерената сложност в общия случай е доста по-малка и от $O(N^2 / 2)$, което означава че алгоритъмът влиза в поставения лимит.